Warum die Mathematik keine ontologische Grundlegung braucht – Wittgenstein und die axiomatische Methode

Simon Friederich
Universität Wuppertal
friederich@uni-wuppertal.de

22.06.2012 / Göttingen

Überblick

Überblick

Grundlegung der Mathematik – In welchem Sinn?

- reduktionistisch: Führt Mathematik durch Definitionen auf **eine** Disziplin zurück, z. B. Logik, Mengenlehre, Kategorientheorie.
- "ontologisch-metaphysisch": Untersucht, ob Sätze der Mathematik **wirklich** wahr und ihre Gegenstände existent sind.

Thema hier: ontologische Grundlegung.

"Realismus" vs. "Anti-Realismus" in *Wahrheit* und *Ontologie*.

Debatte geprägt durch zwei Artikel von Benacerraf [1965] und[1973].

Taits Deflationismus

Prominente Kritik an ontologischen Grundlegungen: William Tait.

- Grundgedanke: Nur “interne” Fragen mathematischer Wahrheit und Existenz sinnvoll. (vgl. Carnap)
- “Intern”: Im Kontext eines à la Hilbert verwendeten *Axiomensystems*.
- Beweis als einziges Kriterium der Wahrheit.

Tait:
“With the axioms in place, what objects exist and what is true of them become questions of what can be logically deduced from the axioms. By whatever dialectical process we come to adopt the axioms, whatever ‘intuitions’ lead us to them, the question of mathematical truth or existence becomes well-defined only with the introduction of the axioms.” ([Tait 2005] S. 89.)

Axiome als implizite Definitionen

Bahnbrechend in Hilberts *Grundlagen der Geometrie*:

- Axiome als (implizite) Definitionen der Begriffe.
- Kein (externes) Kriterium der Wahrheit für die Axiome.
- "[T]he role of intuition and observation is explicitly limited to motivation and is heuristic." ([Shapiro 2001], S. 151)
- Mathematik maximal klar von ihrer Anwendung abgetrennt $\Rightarrow$ maximal streng und genau.

Kritisiert durch Frege, doch historisch erfolgreich.

Tait: "The only conception of mathematics itself that I believe to be viable." ([Tait 2005] S. 4)

Einwand

Kritik an Taits Deflationismus:

- Akzeptanz der Hilbert'schen Methode in der Praxis neutral bezüglich ontologischer Fragen.
- Strukturalisten (Hellman, Shapiro): Axiome *algebraisch*, "applying to any system of objects that meets certain conditions."
- Offene Frage: Welche Objekte überhaupt zulassen, welche Sätze ultimativ wahr?

Überblick

Quellen

Aus den *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*:

- "[W]ir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, dass wir *eine Regel annehmen*." (BGM III, §26)
- "Was ich sage kommt darauf hinaus, die Mathematik sei *normativ*." (BGM VII, §61)
- "Die Mathematik bildet ein Netz von Normen." (BGM VII, §67)

In diesem Bild: Sätze sind Knoten des Netzes, Beweise Verbindungen dazwischen.

Wittgenstein und die Axiome: Übereinstimmungen

Wittgenstein stimmt Hilbert nicht explizit zu, aber es gibt wichtige Übereinstimmungen:

- "Der Satz ist kein mathematisches Axiom, wenn wir ihn nicht gerade dazu verwenden." (BGM IV, §3)
- "Nicht dass er uns als wahr einleuchtet, sondern dass wir das Einleuchten gelten lassen, macht ihn [i. e. das Axiom] zum mathematischen Satz." (BGM IV, §3)
- "Wenn ich nun sagte: es ist ganz gleichgültig, warum er einleuchtet. Genug: Wir nehmen ihn an. Wichtig ist nur, wie wir ihn gebrauchen." (BGM IV, §2)

Auch hier: Intuition und Evidenz nur wichtig für Heuristik.

“...by definition”

Wittgenstein in seinen *Lectures*:

“In a most crude way ... the difference between an experiential proposition and a mathematical proposition ... [is that] we can always affix to the mathematical proposition a formula like ‘by definition’.”

Anders ausgedrückt: Verwendungsweise mathematischer Sätze entspricht weitgehend der von Definitionen.

$\Rightarrow$ Partielle Übereinstimmung mit Hilbert: Axiome als *implizite* Definitionen.

Wittgenstein und die Axiome: Differenzen

(Implizite) Spannungen zwischen Hilbert und Wittgenstein, was den Status von Anwendungen der Mathematik angeht:

- Hilberts Auffassung der Axiome führt zu vollständiger Trennung von Mathematik und Anwendung.
- Wittgenstein sieht Anwendung der Mathematik als wesentlich zu ihrem Verständnis an.

Man könnte meinen:
Erfolg der Hilbert'schen Methode für Wittgenstein problematisch.

Aber nein! (ob W. dies gefiele oder nicht...)

Überblick

(Gewöhnliche) Definitionen

Betrachte gewöhnliche mathematische Definition, z. B. von “Primzahl”:

“Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl, die genau zwei verschiedene natürliche Teiler hat: sich selbst und 1.”

Dieser Satz

- entspricht dem normalen Sprachgebrauch (“descriptive definition”), beschreibt ihn aber nicht.
- stellt eine Norm für den Gebrauch des Begriffs “Primzahl” dar.

$\Rightarrow$ Für Definitionen im engen Sinn ist Wittgensteins Sichtweise plausibel.

Axiome als implizite Definitionen

Beispiel:

“Liegt ein Punkt B zwischen zwei Punkten A und C, so sind die drei Punkte A, B, C voneinander verschiedene Punkte auf einer Gerade und B liegt auch zwischen C und A.”

Verwendet als implizite Definition, spielt dieser Satz eine normative Rolle, insofern er

- bestimmte begriffliche Verbindungen erlaubt und andere ausschließt (“B zwischen A und C, so dass A, B, C nicht auf einer Gerade”).
- akzeptiert werden muss, damit man die (Euklid’schen) Begriffe “Punk”, “Gerade”, “zwischen” überhaupt verwendet.

$\Rightarrow$ Für die Axiome, verwendet als implizite Definitionen, ist W.s Sichtweise plausibel.

Überblick

Theoreme normativ?

Naheliegende Idee:

Theoreme, anders als Axiome, *nicht* normativ.

- Axiome geben den Begriffen scharfe Grenzen.
- Theoreme drücken mit diesen Begriffen die Tatsachen aus.

Aus Sollen Sein?

Dagegen:

Laut Annahme sind Axiome (akzeptiert als) begriffliche Normen.

- Wie kann aus begrifflichen Vereinbarungen eine Tatsachen beschreibende Behauptung gefolgert werden?
- Wie kann man von Aussagen im Konjunktiv durch Deduktion zu welchen gelangen, für die nur der Indikativ angemessen ist?
- “Wie kann aus Sollen Sein folgen?”

Beispiel Pasch-Theorem

Beispiel aus der Geometrie:

> *"Für beliebige vier auf einer gemeinsamen Gerade befindliche Punkte A, B, C, D gilt: Falls B zwischen A und C sowie C zwischen B und D liegt, liegt außerdem B zwischen A und D."*

Von Hilbert als Axiom eingeführt, später als Theorem aus den anderen Axiomen hergeleitet (Moore und Moore).

Aber: Für die Verwendungsweise beim weiteren Beweisen ist das irrelevant!

Beispiel Auswahlaxiom

Beispiel aus der Mengenlehre. Betrachte in ZFC die drei Sätze

- Auswahlaxiom
- Zorn'sches Lemma
- Wohlordnungssatz

Die drei sind wechselseitig auseinander ableitbar, jeder kann Axiom sein.

Sobald wechselseitige Beweise geführt, Verwendungsweise gleich.

Allgemein: Bewiesene Sätze

Allgemein:

- Einen neu bewiesenen Satz zu akzeptieren ist nötig, um die darin enthaltenen Begriffe im Einklang mit ihren Definitionen zu verwenden.
- Einen Begriff im Einklang mit seiner Definition zu verwenden, ist erforderlich, um ihn *überhaupt* zu verwenden.
- Einen bewiesenen Satz zu akzeptieren, ist notwendig, um die enthaltenen Begriffe zu verwenden.

$\Rightarrow$ Theoreme sind – wie die Axiome – begriffliche Normen: Ob wir sie akzeptieren oder nicht, entscheidet welche Begriffe (und welche Logik) wir benutzen.

Überblick

1. Ontologische Grundlegung: Warum? – Warum nicht?
2. Enter Wittgenstein
3. Implizite Definitionen als Normen
4. Von den Axiomen zu den Theoremen
5. Zurück zur ontologischen Grundlegung

Wahrheit von Regeln

Vergleiche mathematische Sätze als Regeln der Begriffsverwendung mit anderen Standards korrekten Verhaltens, z. B.:

- Regeln des Straßenverkehrs
- Regeln des Schach
- Regeln des gesellschaftlichen Umgangs

Frage der *Wahrheit* (nach externen Kriterien) bedeutungslos.

Was sich fragen lässt

Sinnvolle Fragen:

- Wird die Regel ihrer Zielsetzung gerecht?
- Analog: Lässt sich das Axiomensystem wie gewünscht anwenden?
- Wird die Regel de facto akzeptiert?

Dies sind nicht Fragen nach *Wahrheit* gemäß externen Kriterien.

Existenz und Schach

Vergleich der Existenz mathematischer Gegenstände mit der von Schachfiguren:

“Läufer” definiert durch die Regeln zur Bewegung der Läuferfigur und ihre Startposition.

Analog: Mathematische Begriffe definiert durch Axiome (und Theoreme) als Regeln ihrer Verwendung.

Skrupel hinsichtlich Legitimität des Schach aufgrund Zweifel an der Existenz der (abstrakten) Läuferfigur deuten auf Missverständnis.

Ebenso: Skrupel *und* Theorien hinsichtlich mathematischer Existenz beruhen auf Missverständnis.

Wittgenstein und “about”

Wittgensteins eigener Deflationismus bezüglich “about”:

> *One might say that ["* $20 + 15 = 35$ *"] is a statement about numbers. Is it wrong to say that? Not at all; this is what we call a statement about numbers. (LFM p. 112)*

Zusammenfassung

- Taits Deflationismus erkennt nur im Kontext eines Hilbert'schen Axiomensystems formulierte Fragen nach mathematischer Wahrheit und Existenz an.
- Wittgenstein'sche Gedanken zur Verwendungsweise mathematischer Sprache stützen diese Haltung, denn:
- Wittgensteins Sichtweise auf mathematische Sprache als normativ passt auf Hilbert'schen Zugang zur Axiomatik.
- Externe Fragen nach *Wahrheit* (anders als nach Zweckmäßigkeit) für Normen dieser Art verfehlt.
- Gleiches gilt für externe Fragen nach *Existenz*.